**С.Л. Василенко**

# "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов

*В работе представлены структурно-образующие модели, общие для теоремы Пифагора и золотого сечения. Ввиду простых и одновременно уникальных свойств, Иоганн Кеплер охарактеризовал эти математические объекты как «два сокровища геометрии». Такими объединяющими подосновами являются рекуррентные числовые последовательности, треугольники специального вида и др. В частности, выделен равнобедренный треугольник, стороны которого соотносятся как периметр к их сумме. Решений здесь всего два: корень квадратный из двух и константа золотого сечения. Первое число символизирует квадрат и далее кубическую решетку. Второе, в своих различных проявлениях, больше тяготеет к одушевлённым (биологическим и зоологическим) объектам. Их единение в одной модели позволяет высказать предположение об особой роли и дуализме в структурировании живых и неживых материальных тел с одинаковым "строительным" алгоритмом формирования массы.*

---

> Сокровище – то, что ищут долго и далеко, а оно валяется под ногами. Так оно прячется. – Р. Алеев

Название работы о «двух сокровищах геометрии» восходит к замечательному астроному Иоганну Кеплеру. Таким возвышенным слогом он характеризовал теорему Пифагора и модель золотого сечения.

Но что характерно, в творчестве ортодоксов-приверженцев золотоносной тематики выдающийся учёный "воспроизводится", небрежно, как походя. То и дело всплывают вольные искажения-инсинуации.

Наиболее точно отображает великого учёного средневековья в своём научном творчестве искусствовед и философ Василий Зубов, вошедший в историю гуманитарной науки как «русский Леонардо».

Именно он в своё время точно отмечал как «*ненаучную точку зрения* автора (М. Гика), согласно которой формы природы и формы искусства <якобы> тождественны и подчиняются общим метафизическим законам числа и пропорций» [1].

## Золотое сечение в творчестве В. Зубова

Наиболее полно проблематика ЗС раскрыта в докторской диссертации В. Зубова «Архитектурная теория Альберти» (1946)**.** Данную тему "реставрировал" и прекрасно описал Виктор Белянин [2] – педантичный приверженец историзма в области математики.

Разбираясь в противоречивых мнениях по истории термина «золотое сечение», В. Зубов приводит оригинальный текст высказывания Кеплера: «*Существует два сокровища в геометрии: одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении. Из первой вытекает построение куба, пирамиды и октаэдра, а из второго – построение додекаэдра и икосаэдра. Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны... первую, гласящую, что стороны прямоугольника, будучи возведены в степень, равны квадрату линии, противолежащей прямому углу, – эту теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако без первой ничего не стоит*». – J. Kepler, Mysterium Cosmographicum, 1596.

Далее читаем: «*Этот малоизвестный и, насколько я знаю, не переводившийся на русский язык текст важен во многих отношениях. Он не только с очевидностью показывает, что термин "золотое сечение" не принадлежит Кеплеру и что, по Кеплеру, "золотое сечение" следовало бы, скорее, назвать "алмазным"*».

Между тем, во всех публикациях гармонистов-золотоискателей (А. Стахов, Г. Мартыненко и др.) приводится затасканная до неприличия ложная "цитата", причём без какой-либо ссылки на источник: «*В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем*». – В искажённой интерпретации некоего американского математика.

Например, крупнейший геометр 20 века Г. Коксетер тоже даёт несколько вольное изложение Кеплера [3, с. 236]. Но делает это весьма корректно: без прямого цитирования и со ссылкой на источник, – Kepler J. Gesammelte Werke, Munchen: C.H. Beck, 1938.

До сих пор, кроме В. Зубова, никто из авторов-гармонистов, с их гипертрофированной претензией на исторические линии, не удосужился заглянуть в труды Кеплера.

В итоге перекроенная фраза Кеплера стала со временем такой же смехотворной нелепостью, как и утверждение, что термин "золотое сечение" придумал то ли Птолемей, то ли Леонардо да Винчи.

Действительно, «многие современные книги на тему золотого сечения пестрят произвольными умозрительными допущениями и не имеют никакого отношения к науке, разве что близки к жанру научно-фантастической журналистики» [2], например:

– «Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно Леонардо да Винчи был одним из первых, кто ввел сам термин "золотое сечение" (?)». – А. Стахов, «Код да Винчи и ряды Фибоначчи»;

– «Термин "золотое сечение" (aurea sectio) идет от Клавдия Птолемея, который дал это название числу 0,618 (?)… Закрепился же данный термин и стал популярным благодаря Леонардо да Винчи, который часто его использовал». – Э. Сороко, «Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем».

На это счёт нет никаких исторических фактов. Одни лишь выдумки-фантазии или "золотой лохотрон" (А. Чернов), дабы украсить собственные творения старинным налётом таинственности и античной мудрости. Вроде как их работы питаются соками-корнями древности, под соусом которых исподволь "протаскивается" любая ересь: множество золотых констант-сечений или иной подобный вздор.

Надо сказать, гармонисты в своем грубом искажении не одиноки: «Такое деление (точкой С) Пифагор называл *золотым делением*, или *золотой пропорцией,* а Леонардо да Винчи – общепринятым сейчас термином *золотое сечение*» [4, с. 12]. – Эту откровенную чушь писал московский доктор философии Ю. Урманцев. Кстати, нужно признать, хороший доктор в своей области – общей теории систем. Только вот с отдалённым прошлым нелады.

Сегодня точно известно, что «термин "золотое сечение" вошел в употребление лишь в девятнадцатом веке» [5, гл. 23]. Первое терминологическое упоминание *goldener schnitt* соотносится с немецким математиком Мартином Омом (1835) – братом физика Г. Ома.

В 1875 г. данное словообразование впервые появляется в восьмом (!) издании Британники – наиболее полная и старейшая универсальная энциклопедия на английском языке (печатается с 1771 г.), хотя в предыдущих семи его нет.

В 1906 г. публикуется перевод книги другого немецкого математика А. Шустера [6], где в разделе «Квадратный корень» говорится: «*Решённая выше задача называется задачей о «золотом сечении» (sectio aurea)*». – Именно с этой книги или других близких по времени работ термин "золотое сечение" утверждается в русской литературе.

Что касается непомерной фетишизации ЗС или его вездесущности-присутствия, то В. Зубов в седьмой главе своей диссертации отмечал:

«*"Золотые отношения" – побочный результат геометрических построений, следствие, а не причина... Наконец, эмпирическая констатация "золотых отношений" путем обмеров ничего не дает и ничего не доказывает, прежде всего, поскольку она всегда уже является плодом известного теоретизирования, известной интерпретации* *сырых цифр, их "пригонки" друг к другу»*.

Не случайно, на спаде архитектурно-золотоносного бума в марте 1948 на «активе зодчих столицы» отмечалось, что отдельные архитекторы *«питаются псевдонаучной теорией о всемогуществе пресловутого "золотого сечения", теорией о существовании ... неких "вечных" канонов красоты и гармонии... Этой идеалистической шелухой засоряют головы нашей архитектурной молодежи»*. – Если ЗС как-то и соотносится с мерилом красоты-гармонии, то должно, конечно, использоваться в меру.

## Симбиоз двух сокровищ

По образному сравнению Кеплера теорема о пропорциональном (золотом) сечении прекрасна, но без теоремы Пифагора «ничего не стоит».

Не будем столь категоричны. Ибо золотая пропорция, в отличие от геометрических закономерностей в прямоугольном треугольнике, имеет более широкое толкование, выходящее далеко за пределы планиметрии [7]. – Это к слову...

Напротив, нас интересует единение этих замечательных математических структур.

В качестве идеального прообраза теоремы Пифагора выберем наиболее древнюю форму – квадрат с единичными катетами и диагональю, равной корню квадратному из двух.

Именно эта фигура в своё время положила начало перевороту в сознании античных учёных в связи с открытием несоизмеримых геометрических отрезков.

Возникло *нечто*, невыражаемое с помощью привычных натуральных чисел. То есть, геометрически *оно* есть, как диагональ квадрата 1×1, но арифметически – нет.

В конечном итоге это привело к совершенно новому исчислению и разработке теории иррациональных чисел, которые не представимы в виде отношения целых чисел.

Таким образом, наша задача несколько сужается и сводится к поиску общих оснований-истоков двух чисел ($\Phi$ и $\sqrt{2}$) или математических моделей, объединяющих эти алгебраические числа.

Как положительные корни алгебраических уравнений $x^2 - x - 1 = 0$ и $x^2 - 2 = 0$.

В некотором смысле это и есть первая структура, объединяющая две фундаментальные математические константы.

Надо сказать, иррациональность приводила в гипнотический шок древнегреческих учёных, которые самозабвенно исповедовали арифметику целых чисел:

– «число есть множество, которое может быть измерено единицей», Аристотель, "Метафизика";

– «число же – множество, составленное из единиц», Евклид, "Начала", 7 книга.

Да, и не мудрено. Действительно, трудно себе вообразить-представить, что вычерченные перед глазами отрезки не имеют общей меры!?

Однако продолжим...

## Задача на разрезание

Хорошо известны следующие геометрические задачи на разрезание.

1. Отношение сторон прямоугольника $1 \times \sqrt{2}$ таково, что при его разрезании пополам параллельно короткой стороне получатся две уменьшенные фигуры той же пропорции.

Это свойство, в частности, используется в качестве пропорции для формата бумаги в международном стандарте ISO 216 (http://en.wikipedia.org/wiki/ISO_216).

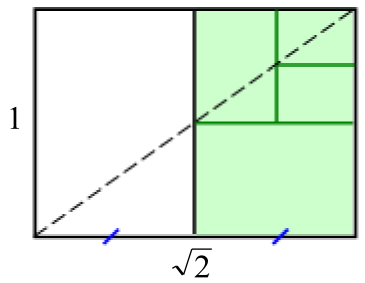
2. Прямоугольник $1 \times \Phi$ называют золотым. Если от него отрезать квадрат, сторона которого равна меньшей стороне, то оставшийся прямоугольник является уменьшенной копией исходного.

Такие процессы разрезания можно продолжать до бесконечности.

«Тем самым будет построен пример совершенного квадрируемого прямоугольника бесконечного порядка» [5].

Вершины получаемых золотых прямоугольников лежат на диагоналях первого и второго прямоугольника.

Таким образом, золотой прямоугольник составлен квадрата и своей уменьшенной в $\Phi$ раз копии. В этом просматривается связь теоремы Пифагора с золотым сечением и конкретно констант $\Phi$ и $\sqrt{2}$ (рис. 1).



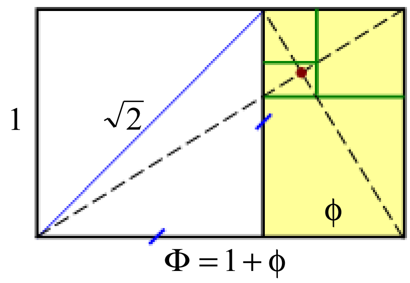




Рис. 1. Разрезание прямоугольников с образованием эквивалентных фигур

## Числовое тождество

Запишем два очевидных равенства: $\Phi^2 = 1 + \Phi = 2 + \phi$ и $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Вычтя их одно из другого, получим числовое тождество $\left(\Phi - \sqrt{2}\right)\left(\Phi + \sqrt{2}\right) = \phi$, где $\phi = \Phi^{-1} = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$.

Как говорится, ничего необычного, но всё же...

## Алгоритм Рассела

В работах [8; 9, гл.24; 10] описана любопытная модель формирования взаимосвязанной пары числовых рекуррентных последовательностей с особыми свойствами.

Алгоритм восходит к далёкой поре древности:

«Квадратный корень из 2 – первое из открытых иррациональных чисел – был известен ранним пифагорейцам, и были изобретены остроумные методы приближения к его значению. Наилучшими были следующие: образуйте два столбца чисел, которые мы будем называть $a$ и $b$; каждый столбец начинается с единицы.

Каждое последующее $a$ на каждой стадии образуется путем сложения уже полученных последних $a$ и $b$. Последующее $b$ образуется путем прибавления удвоенного предыдущего $a$ к предыдущему $b$. Так получаются первые 6 пар (1, 1), (2, 3), (5, 7), (12, 17), (29, 41), (70, 99). Для каждой пары выражение $2a^2 - b^2$ будет 1 или –1. Таким образом, $b/a$ является почти квадратным корнем из 2 и с каждым новым шагом приближается к корню из 2».

По мнению В. Белянина «многократно замечено сначала двумя индийскими математиками в VII и XII веках, а затем в Европе: Ферма, Валлисом и другими…», что в общем случае данный алгоритм или "модель Рассела" сходится к аттрактору $\sqrt{k}$ – квадратному корню любого целого числа:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + k \cdot x_{n-1}, \\ x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases} \qquad \frac{y_n}{x_n} \Rightarrow \sqrt{k}.$$

Например, квадратные корни из двух и пяти образуются такими связанными рядами:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{41}{29} \quad \frac{99}{70} \quad \frac{239}{169} \ \dots \ \to \ \sqrt{2};$$

$$\frac{2}{1} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{22}{10} \quad \frac{72}{32} \quad \frac{232}{104} \quad \frac{752}{336} \quad \frac{2432}{1088} \ \dots \ \to \ \sqrt{5}.$$

Перемена местами коэффициента $k = 2$ в первой формуле приводит к формированию чисел Фибоначчи, сходящихся к константе золотого сечения:

$$\begin{cases} y_n = 2y_{n-1} + x_{n-1}, \\ x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases} \qquad \frac{y_n}{x_n} \Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Алгоритм даёт соответственно чётные $a_n$ и нечётные $b_n$ элементы чисел Фибоначчи:

$$\frac{1}{1}\ \ \frac{3}{2}\ \ \frac{8}{5}\ \ \frac{21}{13}\ \ \frac{55}{34}\ \ \frac{144}{89}\ \dots \ \rightarrow\ \Phi.$$

На основании этого в работе [8] даже делаются выводы не только об «эволюционной связи двух математических констант – квадратного корня из двойки и золотого сечения», но также в целом об «эволюционном развитии нашей вселенной».

Представляется, это – излишне эмоциональная и слишком завышенная оценка значимости описанного события.

Кстати довольно заурядного события, как частного случая более общих представлений в данной области, например:

а) начальные условия $(x_0, y_0)$ могут быть отличны от единиц и представляться любыми вещественными числами;

б) коэффициенты в рекурсии не обязательно равны 1 или 2 и также могут выражаться произвольными действительными числами;

в) эти в общем случае различные коэффициенты могут присутствовать одновременно при разных слагаемых рекурсии и др.

Итак, две пары рядов образованы в рамках одного и того же рекуррентного алгоритма, приближая нас к разным константам.

В определённой мере можно говорить о связи между собой чисел Ф и √2.

В работах [10, 11] описанная система уравнений обобщена, и в частности, получены расширенные структуры для константы золотого сечения:

*модель парно-золотых рекурсий*

$$\begin{cases} y_n = (s+1)y_{n-1} + x_{n-1}, \\ x_n = s \cdot x_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases} \qquad \theta = \mathbf{\Phi}, \quad \lambda = s + \mathbf{\Phi};$$

*модель нечётных степеней ЗС*

$$\begin{cases} y_n = k_m y_{n-1} + x_{n-1}, \\ x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases} \qquad \theta = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m+1}}, \quad \lambda = 1 + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m+1}},$$

*модель чётных степеней ЗС*

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = k'_m y_{n-1} - x_{n-1}, \end{cases} \qquad \theta = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m}}, \quad \lambda = 1 + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m}}.$$

где $k_m = L_{2m+1} + 1 \Rightarrow 2, 5, 12, 30, 77, 200...;\ m = 0, 1, 2, \dots;$

$k'_m = L_{2m} + 1 \Rightarrow 3, 4, 8, 19, 48, 124...;\ m = 0, 1, 2, \dots;$

$L_n$ – числа Люка или частная последовательность Фибоначчи с начальными условиями 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...;

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}; \qquad \theta = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}.$$

## Парно-дуальные ПИС-триномы

В работе [11] изложены основы новой теории обобщения задач, приводящих к уникальной константе золотого сечения (ЗС). Впервые для ЗС используется аддитивная модель с внешними условиями в виде неоднородного уравнения, характерного для открытых систем. Показано, что трёхзвенная аддитивно-рекурсивная модель $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + G^n$ также сходится к своему аттрактору ЗС, если $G \le \Phi$.

"Перебить" золотой аттрактор можно лишь такой функцией, возрастание которой происходит быстрее, чем $\Phi^n$. Иначе говоря, аддитивная функция-добавка в классической модели Фибоначчи не должна расти со скоростью, превышающей скорость увеличения степенной функции $\Phi^n$.

Кроме того, в статье [11] описаны новые конструкции: парно-дуальные ПИС-триномы. С периодически изменяемой структурой – ПИС. Одни из них дают корень из двух, другие – число ЗС. Простейшая периодически изменяемая структура имеет вид пары рекурсий триномиального вида:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-q}, & n = 1\,(\mathrm{mod}\ 2), \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-p}, & n = 0\,(\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

$(f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}) = (0, 1, \ldots, 1)$ – начальные условия; $n$ – дискретное время; $p$, $q$ – параметры-индексы запаздывания, $n \ge p \ge q$.

То есть для нечётных элементов $n$ (деление на 2 с остатком 1), суммирование происходит по первой строке-формуле, для чётных элементов – по второй.

Вместо одного аттрактора, как это имело место для обычных рекуррентных последовательностей, теперь следует различать пару предельных отношений

$$(\alpha, \beta) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}, \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}\right).$$

Эти величины при $q = 2$ разнятся между собой порядком следования в отношении: чёт-нечет или нечет-чёт и удовлетворяют общему равенству:

$$1 + \alpha = \alpha\beta.$$

Отсюда, в частности, следует, что предельное отношение двух элементов ряда, отстоящих друг от друга на две позиции (2-аттрактор), уже не зависит от чётности индекса $n$, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-2}} = \alpha \cdot \beta.$$

**1)** Приняв запаздывания равными $p$ = 3, $q$ = 2, приходим к модели "корня из двух".

Начальные значения ряда имеют вид:

0 1 1 2 3 5 7 12 17 29 41 70 99 169 239 408 577 985 1393 ...

Предельные отношения соседних членов числовой последовательности связаны с "корнем из двух". Два аттрактора, соответствующие чётным и нечётным значениям последовательности, равны

$$\alpha \;=\; \sqrt{2} \;\approx\; 1{,}414; \qquad \beta \;=\; 1 + 1/\sqrt{2} \;\approx\; 1{,}707.$$

Характерны такие предельные аттракторы:

$$\frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{1}}} \to \sqrt{2}, \qquad \frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{2}}} \to 1+\sqrt{2}, \qquad \frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{3}}} \to 2+\sqrt{2}\,.$$

В то же время, независимо от чётности-нечётности $n$, справедливо отношение:

$$\frac{f_n}{f_{n-2}} \quad \to \quad \alpha\cdot\beta \;=1+\sqrt{2} \;\approx\; 2{,}414\,.$$

В целом можно сказать, что рассмотренный случай – это «модель $\sqrt{2}$ ».

**2)** _Модель золотого сечения (периодическая структура)_ описывается следующей парой уравнений, характеризующих периодически изменяемую структуру:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1\,(\mathrm{mod}\ 2), \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-p}, & n = 0\,(\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

При $p = 4$ образуется следующий ряд:

**0** 1 **1** 1 **1** 2 **2** 4 **3** 7 **5** 12 **8** 20 **13** 33 **21** 54 **34** 88 **55** 143 **89** 232 **144** 376 **233**...

Здесь всё довольно просто.

На чётных номерах-позициях расположены последовательные числа Фибоначчи.

Между ними находятся числа, которые на единицу меньше чисел Фибоначчи.

А вот при $p = 7$ формируемая последовательность уже не столь очевидна:

0 1 1 1 1 1 1 2 2 4 3 7 4 11 6 17 10 27 17 44 28 72 45 117 72 189 116 305 188 493 305 798 494 1292 799 2091 1292 3383 2090 5473 3382 8855 5473 1433 8856...

Или с изменёнными начальными условиями (*подчёркнуто*):

<u>0 1 2 3 4 5 6</u> 11 7 18 10 28 15 43 26 69 44 113 72 185 115 300 184 484 297 781 482 1263 782 2045 1266 3311 2047 5358 3310 8668 5355...

Примечательно, что все эти последовательности имеют аттракторы, непосредственно связанные с константой золотого сечения, а именно:

$$\alpha \;=\; \Phi^{-1} \;\approx\; 0{,}618; \qquad \beta \;=\; 1+\Phi = \Phi^2 \;\approx\; 2{,}618\,.$$

Их произведение равно Ф. Это означает, что независимо от чётности-нечётности $n$, для данной последовательности справедливо отношение для 2-аттрактора:

$$\frac{f_n}{f_{n-2}} \to \Phi\,.$$

В теоретических исследованиях в области золотого сечения это довольно нетривиальный результат. Ибо до сих мы привыкли видеть подобное соотношение для соседних членов чисел Фибоначчи $F_n$, то есть $F_n / F_{n-1} \to \Phi$.

На наш взгляд, второе уравнение образуемой модели

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1\,(\mathrm{mod}\ 2), \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-7}, & n = 0\,(\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

косвенно характеризует симметрию пятого порядка (5 = 7 – 2), которая свойственна правильному пятиугольнику.

Это именно та симметрия, которая запрещена в решётке кристаллов, но может присутствовать в квазикристаллах – искусственных сплавах, образуемых при чрезвычайно высокой скорости охлаждения нагретых расплавов: до миллиона градусов в секунду.

## Модельные структуры пропорционального роста

В работе [12] исследованы модельные структуры пропорционального роста.

В качестве основы рассматривается целое, которое условно равно $1$ и состоит из двух аддитивных частей $1 = a + b$.

В общем случае можно выделить два основных пути-варианта пропорционального роста: увеличение-наращивание целого на величину $\Delta = \{a,\ b\}$ , равную одной из частей.

Анализ возможных вариантов составления пропорции с её решением относительно большей части $b$ приводит к следующим положительным решениям:

модели ЗС:

$$\frac{1+b}{1} = \frac{1}{b} \quad \to \quad b^2 + b - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618; \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618;$$

$$\frac{1+b}{b} = \frac{b}{a} \quad \to \quad b^2 + b - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618; \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618;$$

корень из двух +1

$$\frac{1+b}{b} = \frac{b}{a} \quad \to \quad 2b^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707; \qquad \frac{b}{a} = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414;$$

гармоническая модель (по Архиту)

$$\frac{1+a}{1} = \frac{b}{a} \quad \to \quad b^2 - 4b + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586; \qquad \frac{b}{a} = \sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

Помимо этих структур есть ещё модель «две трети», но она выходит за рамки рассматриваемых структур.

Таким образом, в новых координатах развития золоте сечение пополнилось ещё двумя моделями, основанными на иррациональном корне из двух. Последнее сразу воссоздаёт образ диагонали квадрата с единичной стороной. Той самой диагонали, которая долгие столетия не давала покоя многим поколениям учёных своей несоизмеримостью со стороной фигуры.

Данные модели синтезированы на основе одинакового принципа роста.

Они равноправны в выбранном классе моделей пропорционального роста, альтернативны и имеют следующую структуру

$$\frac{1'}{(1,\ b)} = \frac{(1,\ b)}{(b,\ a)},$$

где $1' = 1 + (a, b)$ – новое целое, увеличенное на меньшую $a$ или большую $b$ часть; $(1,\ b),\ (b,\ a)$ – возможные пары величин, из которых в конкретной пропорции выбирается одна.

## Квадратные уравнения

Золотому отношению $b/a = \Phi$, по-прежнему соответствует квадратное уравнение $x^2 = x + 1$ и его эквивалентный аналог в виде аддитивно-разностного уравнения $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Как формообразующая структура числовой последовательности с двумя произвольными заданными начальными условиями, не равными одновременно нулю.

Для пропорции с решением $x = b/a = 1 + \sqrt{2}$ на основе "корня из двух + 1" можно сопоставить подобное соотношение:

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1+b}{b} = \frac{a+2b}{b} = \frac{1+2b/a}{b/a} = \frac{1+2x}{x} \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0\,;$$

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}\,.$$

Таким образом, имеет место связь констант через алгебраические уравнения. Правда, заметим, что взаимоотношение – не столь очевидное. Поскольку кроме данных видов уравнений и соответствующих корней имеет место бесконечное множество других вариаций.

## Золотое сечение и корень из двух в равнобедренном треугольнике

Рассматриваемая ниже новая структура, в отличие от предшествующих версий, имеет исключительное значение для исследуемых констант. И никаких других!

Пусть $b = 1$ – боковые стороны, $a$ – основание равнобедренного треугольника.

Тогда $2b + a$ – его периметр.

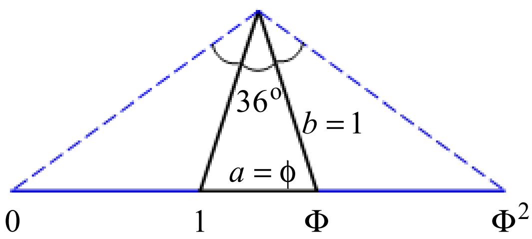
Образуем такую пропорцию:

**ДВЕ СТОРОНЫ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ОТНОСЯТСЯ КАК ПЕРИМЕТР К ИХ СУММЕ.**

Здесь возможно только два варианта.

Первая версия приводит к решению золотой пропорции (рис. 2):

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1+2x}{1+x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \{-\phi,\ \Phi\}\,.$$

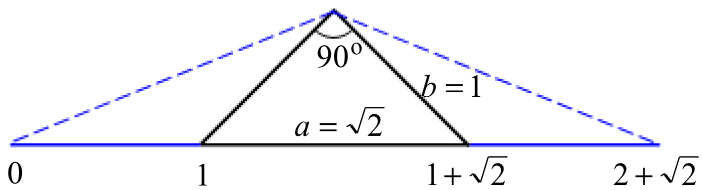



$$\frac{b}{a} = \frac{a+2b}{a+b} = \frac{2+\phi}{1+\phi} = \Phi$$

Рис. 2. Стороны равнобедренного треугольника соотносятся как периметр к их сумме, образуя золотую пропорцию

Вторая версия даёт модель «квадратного корня из двух» (рис. 3):

$$y = \frac{a}{b} = \frac{y+2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}\,.$$




$$\frac{a}{b} = \frac{a+2b}{a+b} = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Рис. 3. Стороны равнобедренного треугольника соотносятся как периметр к их сумме, образуя гармоническую модель «корня из двух»

Таким образом, имеем одно общее правило для золотого треугольника (рис. 2) и прямоугольного треугольника Пифагора (рис. 3).

Золотой равнобедренный треугольник имеет непосредственное отношение к треугольникам Робинсона:

а) остроугольный треугольник с отношением сторон – $1:1:\phi$. Это наиболее распространённое название золотого треугольника [13, 14];

б) тупоугольный треугольник с отношением сторон – $1:1:\Phi$.

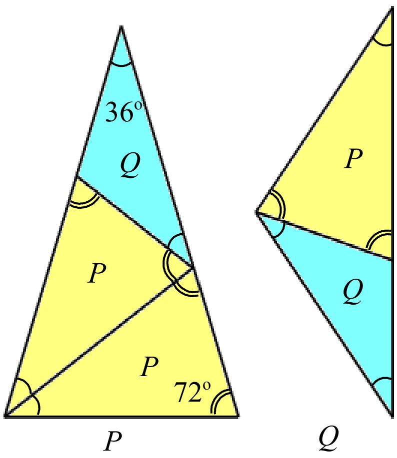



Рис. 4. Инфляция–дефляция треугольников Робинсона

Это, так называемые, *треугольники Робинсона* с углами $P(36°, 72°, 72°)$ и $Q(108°, 36°, 36°)$. У Воробьева [15, с. 100] они называются *треугольниками золотого сечения* (ЗС).

Инфляция (склеивание) и дефляция (разрезание) приводит к линейным размерам в $\Phi$ раз больше или меньше исходных фигур (рис. 4).

В виду особых гармоничных признаков они используются в задаче на замощение плоскости [16], известной как проблема паркета, а также при размещении композиций по диагонали через центр.

Первый треугольник можно дополнить до ромба. Вместе со своим двойником они образуют пару фигур мозаики Пенроуза.

Уникальные свойства этой мозаики, а также иные свойства ЗС, позволяют высказать предположение об особой роли золотого треугольника в структурировании живых (биологических и зоологических) объектов.

Второй треугольник дополняется до квадрата.

То есть корень из двух формирует (символизирует) через квадрат кубическую решетку.

Известна её особая роль в построении костных структур в виде твёрдых тел.

Кроме того, прямоугольный треугольник с равными катетами имеет наибольшую площадь среди равнобедренных прямоугольных треугольников с одинаковым периметром.

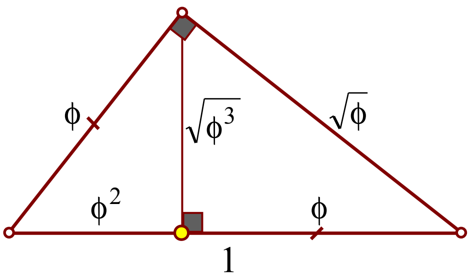
## Треугольник Кеплера

Треугольник Кеплера подробно описан нами в работе [17] и соотносится с сочетанием двух чисел $\left(\Phi, \sqrt{\Phi}\right)$,которые имеют необычное проявление в треугольной тематике [18]

Немецкий математик и астроном первым продемонстрировал, что эта фигура характеризуется отношением между гипотенузой и меньшим катетом, в виде золотой пропорции [19, 20; 21, с. 149].

Этот треугольник объединяет две математических концепции – теорему Пифагора и золотое сечение, что глубоко впечатлило Кеплера.

В письме профессору Михаэль Мастлину он писал[1]: «Если на <прямолинейном> отрезке, который делится в крайнем и среднем отношении, построить прямоугольный треугольник так, чтобы прямой угол находился на перпендикуляре к точке деления, то меньшая сторона <треугольника> будет равна большей части разделенного отрезка».




Строится треугольник сравнительно просто (рис. 5).

Сторона квадрата единичной длины делится пополам.

Из точки деления $O$ проводится дуга, отсекая на продолжении стороны величину $\Phi$.

[1] «If on a line which is divided in extreme and mean ratio one constructs a right angled triangle, such that the right angle is on the perpendicular put at the section point, then the smaller leg will equal the larger segment of the divided line». – http://www.moscowbooks.ru/pod/book.asp?id=459959.

Этим раствором циркуля чертится дуга (с центром $C$) до пересечения с продолжением противоположной стороны квадрата

В результате такого построения образуется прямоугольный "золотой" треугольник, стороны которого соотносятся в геометрической прогрессии: $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$.

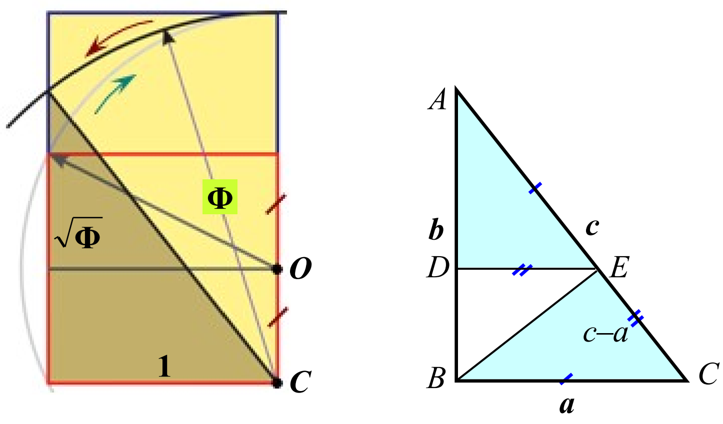



Рис. 5. Построение гармоничного треугольника Кеплера и его пропорции

В работе [22] он описан на языке пропорций: гипотенуза $c$ так относится к меньшему катету $a$, как этот катет относится к его дополнению $c-a$ до гипотенузы (рис. 5).

Но, пожалуй, самым главным свойством треугольника является "золотая" пропорция его сторон (!)

$$a:b=b:c.$$

Это ещё одна альтернативная пропорция, вытекающая из подобия прямоугольных треугольников $ABC$ и $ABE$. Тем самым больший катет $b$ золотого треугольника является средним геометрическим между его гипотенузой $c$ и меньшим катетом $a$.

Данная пропорция путем перемножения приводится к виду $b^2=ac$: квадрат большего катета равен произведению меньшего катета на гипотенузу.

Геометрически (по Евклиду) это означает, что прямоугольник, заключенный между гипотенузой и меньшим катетом, равен квадрату на большем катете.

В литературе по пирамидам его называют Δ Кеплера или Δ Прайса [23].

Это единственный прямоугольный треугольник, стороны которого образуют геометрическую пропорцию $c:b=b:a$ и вытекающую из этого геометрическую прогрессию сторон $a:b:c=1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ [24].

Высота $BE$ есть среднее геометрическое (пропорциональное) двух сегментов гипотенузы $AE$, $EC$.

Каждый катет треугольника есть среднее пропорциональное гипотенузы и смежных сегментов $b^2=c\cdot AC,\ a^2=c\cdot EC.$

Опуская терминологические особенности, треугольники Робинсона и Кеплера, так или иначе, могут быть отнесены к золотоносным треугольникам.

Итак, стороны $\Phi:\sqrt{\Phi}:1$ формируют прямоугольный треугольник <Кеплера>. В частности, это непосредственно вытекает из написания квадратного многочлена, определяющего золотое сечение, в виде теоремы Пифагора:

$$\Phi^2=\Phi+1 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^2=\left(\sqrt{\Phi}\right)^2+1^2.$$

Есть ещё одно любопытное наблюдение, уводящее нас к различным средним, которые широко использовались в древнегреческой математике.

Пусть $H=2\dfrac{xy}{x+y}$, $G=\sqrt{xy}$, $A=\dfrac{x+y}{2}$ – средние двух положительных чисел $y>x$: гармоническое, геометрическое (пропорциональное) и арифметическое.

Если в прямоугольном треугольнике катеты равны $H$ и $G$, а гипотенуза равна $A$, то [25] $\dfrac{A}{H}=\dfrac{A^2}{G^2}=\dfrac{G^2}{H^2}=\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение и $\dfrac{y}{x}=\Phi^3$.

Положим $(x,y)=\left(\phi,\Phi^2\right)$. Тогда $(H,G,A)=\left(1,\sqrt{\Phi},\Phi\right)$. – Это гармонический треугольник Кеплера.

## Зри в корень

При изучении природных объектов и адекватных им математических моделей важен внимательный анализ конечных результатов.

Получаемые решения могут содержать завуалированные золотоносные структуры. В частности, наподобие целочисленных степеней $\Phi^n$.

Это хорошо видно на примере пропорции, дающей решение с золотоносным числом $\phi^3 = \phi^2 - \phi$, равным разности между большей и меньшей частью золотого сечения единичного целого:

$$\frac{1-x}{2} = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5} - 2 \; = \; \phi^3 \; \approx \; 0{,}236\,.$$

Если записать это уравнение как $x = \dfrac{1}{4+x}$, а потом каждый раз заменять $x$ в знаменателе значением $1/(4+x)$, то придем к оригинальной цепной (непрерывной) дроби:

$$x(4+x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4+x}, \qquad x = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+x}}, \quad x \; = \; \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}} \; = \; \phi^3 \,.$$

Опуская промежуточные вычисления, можно показать, что в общем случае нечётные степени малого золотого числа выражается любопытной цепной дробью

$$\phi^k \; = \; \cfrac{1}{L_k + \cfrac{1}{L_k + \cfrac{1}{L_k + \ldots}}} \; ,$$

где $L_k$ – числа Люка 1, 4, 11, 29, 76, 199,... с нечётными номерами $k = 2n+1$ – одна из наиболее известных последовательностей Фибоначчи с парой начальных значений (2, 1).

*Или другой пример.* При раскопках Помпеи в мастерской скульптора найден мерный циркуль, который имеет все основания считаться инструментом целочисленного приближения к золотому сечении.

Действительно, длина циркуля составляет 146 мм, а шарнир делит его на два плеча — 56 и 90 мм, отношение которых 56/90 ≈ 0,62 близко к золотому сечению.

Всё бы и ничего. Однако ряд чисел 146, 90, 56 никак не образуют единую последовательность Фибоначчи. Кроме того, весьма значимо отличие между собой приближённых отношений золотого сечения 146/90 и 90/56.

Можно предположить, что со временем инструмент, возможно, частично сработался, в результате чего его размер уменьшился на один миллиметр.

На самом деле речь идёт, вероятно, о размерах 147 = 91 + 56, которые являются составляющими единого ряда Фибоначчи с затравочными числами (0, 7) или (7, 7):

0, 7, 7, 14, 21, 35, **56**, **91**, **147**...

В таком случае подход к выбору целых чисел при конструировании измерительного устройства становится более обоснованным. Одновременно достигается более высокая точность приближения к ЗС.

## Вместо заключения

«Со времен астронома И. Кеплера (XVII век) иногда высказываются различные точки зрения относительно того, что обладает большей фундаментальностью – теорема Пифагора или золотая пропорция». Надо сказать, бесплодное занятие. Они «в своем развитии тесно переплетаются одна с другой и геометрическими и алгебраическими свойствами. Между ними нет ни пропасти, ни принципиальных различий. Они не конкурируют, у них разные предназначения» [26].

Теорема Пифагора лежит в основании математики.

Золотое сечение порождено тривиальной пропорцией из трёх $a+b=1$, потому его часто наделяют свойствами гармонии, и даже красоты. Оно несложно для понимания. Его основательность не считается общепризнанной, однако, набор уникальных свойств позволяет высказывать разные варианты гипотезы о возможной универсальности.

Так или иначе, существует ряд моделей, объединяющих особенности теоремы Пифагора и ЗС. Особенно это хорошо проявляется в прямоугольных треугольниках специального вида.

Рассмотренные нами модели, как и многие другие, представляют собой абстрактно-упрощенное выражение исследуемых явлений в форме числовых последовательностей, уравнений, графиков и др.

Несмотря на принятую идеализацию-абстракцию, они дают возможность проанализировать отдельные стороны и закономерности многих изучаемых процессов.

Общность и возможность единения в структурировании "корня из двух" и золотой константы $\Phi$ чрезвычайно важно.

Первое число символизирует квадрат и далее кубическую решетку – основу кристаллов. Второе, в своих различных проявлениях, больше тяготеет к одушевлённым (биологическим и зоологическим) объектам.

Всё вместе позволяет считать, что живые и неживые материальные тела в своей основе могут иметь похожие закономерности строения-наращивания массы. Причём с одинаковым расширением практически на все объёмные элементы природы.

**Литература:**

1. Зубов В.П. Рецензия на книгу М.Гика. Эстетика пропорций в природе и искусстве // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12965, 15.02.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/006a/02320010.htm.

2. Белянин В.С. Не говори с тоской: *их нет*; но с благодарностию: *были* (штрихи к творчеству В.П.Зубова) // Сб. ст., посвящ. 110-летию со дня рожд. В.П. Зубова (в печати).

3. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с.

4. Урманцев Ю.А. Симметрия природы и природа симметрии (Философские и естественнонаучные аспекты) – М.: Мысль, 1974. – 132 с. – http://www.sci.aha.ru/ots/OTS_Simmetry.pdf.

5. Мартин Гарднер. Математические головоломки и развлечения. – 2-е изд., испр. и доп. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 447 с.

6. Шустер А. Популярные лекции низшей и высшей математики. – С.-Петербург: «Вестник Знания» (В.В. Битнера), 1906. – 130 с.

7. Мелешко С.В., Беляева Е.Д., Куксова Е.В. Золотое сечение в математике и других областях // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 78–79. – http://www.rae.ru/snt/pdf/2013/6/69.pdf.

8. Чернов А. Заметки о вечном / Альтернативный алгоритм ряда Фибоначчи и обобщённый алгоритм для √2 и золотого сечения. – 2009. – http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_2.htm.

9. Рассел Б. История западной философии, и её связь с политическими и социальными условиями от античности до наших дней: 3- изд. испр. – Новосибирск: Сибир. универ. изд-во, 2001. – http://psylib.org.ua/books/rassb01/index.htm.

10. Василенко С.Л. Парные двухчленно-аддитивные рекурсии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.10.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=51&sm=2.

11. Василенко С.Л. Новые рекуррентные формы золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-

техническая библиотека SciTecLibrary. – 20.11.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.

12. Василенко С.Л., Никитин А.В. Модельные структуры пропорционального роста. Часть 1. Синтез // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=107&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 22.09.2013. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13091.html.

13. Weisstein E.W. Golden Triangle // MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html.

14. Golden triangle (mathematics) // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_triangle_(mathematics).

15. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

16. Корепин В.Е. Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. – 1987. – № 6. – с. 2–6.

17. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

18. Василенко С.Л. Треугольники и золотые чевианы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.06.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=76&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17549, 23.06.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161974.htm.

19. Livio Mario. The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002. – 149 p.

20. Herz-Fischler R. The shape of the Great Pyramid. – Wilfrid Laurier University Press, 2000. – 293 p.

21. Mario Livio. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number, Broadway Books, 2002.

22. Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математ. образование. – 2006. – № 3. – С. 59–71. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.

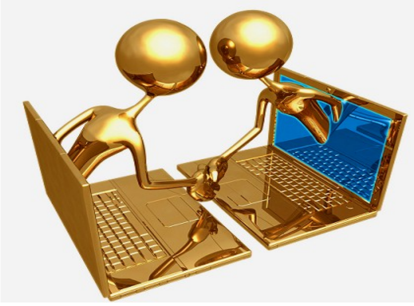
23. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

24. Василенко С.Л. Пирамидальная золотоносность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.02.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=64&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17305, 11.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161930.htm.

25. Di Domenico A. The golden ratio – the right triangle – and the arithmetic, geometric, and harmonic means // Mathematical Gazette 89, July 2005, 261.

26. Белянин В.С., Романова Е.Н. Золотая пропорция. Новый взгляд // Наука и жизнь. – 2003, № 6. – http://www.nkj.ru/archive/articles/3070/.

© ВаСиЛенко, 2013, Харьков



Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html